数理经济学复习

Xi Xiang

2025.06

Contents

1 集合、数列与向量空间

1.1 集合

❖ **Definition:1.1 子集** ▽

对于任意的 $a \in A$, 都有 $a \in B$ 时, 称集合 A 包含于集合 B, 记作 $A \subset B$, 此时称 A 为 B 的**子集**.

❖ **Definition:1.2 集合相等** ▽

集合 A 与 B 互为子集, 即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 时，称集合 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$.

♦ **Theorem:1.3 集合的运算律** ▽

(1) $(A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

(2) $(A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.

(3) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

♦ **Theorem:1.4 指标集合的De Morgan法则** ▽

对各指标 $\lambda \in \Lambda$, 集合 A_λ 与之对应时，对于任意的集合 X 有以下等式成立:

(1) $X \setminus \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

(2) $X \setminus \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

Proof: 仅证明(2). 设 $x \in X \setminus \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 则 $x \in X$ 且 $x \notin \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 即 $x \in X$ 且存在 $\mu \in \Lambda$, 有 $x \notin A_\mu$. 所以 $x \in X \setminus A_\mu$. 即 $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$ 成立. 故 $X \setminus \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \subset \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$.

反之, 设 $x \in \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda)$, 存在 $\mu \in \Lambda$, 有 $x \in X \setminus A_\mu$. 即 $x \in X$ 且 $x \notin A_\mu$. 从而 $x \in X$ 且 $x \notin \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, 也即 $x \in X \setminus \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. 故 $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (X \setminus A_\lambda) \subset X \setminus \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. □

❏ **Axiom:1.5 幂集合公理** ▽

设 A 是一个集合, 则 $\{B|\ B \subset A\}$ 是一个集合.

❖ **Definition:1.6 幂集合** ▽

集合 Y 的所有子集的集合称为**幂集合**. 即 $2^Y = \{U|\ U \subset Y\}$.

❖ **Definition:1.7 关系** ▽

集合 $X \times Y$ 的子集合 R 被称为集合 X 和 Y 的**关系**.

❖ **Definition:1.8 对应** ▽

f 是集合 X 和 Y 的关系, 当 $X = \{x \in X | \ \exists\ y, 使得 (x, y) \in f\}$ 时, 称 f 是从 X 到 Y 的**对应**.

❖ **Definition:1.9 复合映射** ▽

对于两个映射 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$, $h: X \to Z$ 在 $h(x) = g(y)$ 且 $y = f(x)$ 时, 表示为 $g \circ f$. 称 h 为映射 g, f 的**复合映射**.

❖ **Definition:1.10 二项关系** ▽

集合 $X \times Y$ 的子集合 R 被称为集合 X 和 Y 的**二项关系**.

❏ **Axiom:1.11 实数连续性公理** ▽

任意的上有界(下有界)集合 $X \subset \mathbb{R}$ 一定存在**上确界** $\sup X$ (**下确界** $\inf X$).

♦ **Theorem:1.12** ▽

设 X 是整数非空集合并且有上界(下界）, 则 X 包含最大的元素(最小的元素）.

Proof: 只证上有界. 因为 X 是整数非空集合且有上界, 由实数连续性公理, X 一定有上确界 s.

若 X 的上确界 s 是整数. 此时 $s-1$ 也是整数, 且不是上确界. 由上确界的定义, 存在整数 $t \in X$, 有 $t > s-1$. 由于 s 是上确界, 有上确界 $s = t$ 得证.

若 X 的上确界 s 是不整数. 只需证明 s 不可能是上确界即可. 由于 s 不是整数, 故 $s \notin X$, 而上确界是最小上界, 此时 $s-1$ 也不是上确界. 故必然存在整数 $m \in X$, 有 $m > s-1$. 由于 s 是上确界, 对 $\forall\ t \in X$, 有上确界 $t < s < m+1$, 这意味着 m 是 X 的上界, 矛盾. □

♦ **Theorem:1.13** ▽

对于任意的正数 ε, 存在某个自然数 m 使得 $\varepsilon > \dfrac{1}{m}$.

Proof: 因为自然数集 $\mathbb{N}$ 没有上界, 对 $\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ m \in \mathbb{N}$, 使得 $\varepsilon > \dfrac{1}{m}$, 即 $\varepsilon > \dfrac{1}{m}$. □

❖ **Definition:1.14** ▽

在实数的子集 X 任取 a, b $(a < b)$, 若 X 中存在 c, 满足 $a < c < b$, 则 X 是**紧密**的.

♦ **Theorem:1.15** ▽

有理数集 $\mathbb{Q}$ 是紧密的.

Proof: 对 $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$. 若 $a<0,b>0$, 则 $a<0<b$ 满足要求.

若 $a<0$ 且 $b\le 0$, 则 $0\le -b<a$, 只需考虑 $0\le a<b$ 即可.

由定理1.13, 对于 $b-a>0$, $\exists\ m\in\mathbb{N}$, 使得 $b-a>\dfrac{1}{m}>0$ 成立.

由于自然数集没有上界, 故存在满足大于实数 ma 的最小自然数 n, 使得 $n-1\le ma<n$.

从而 $0<\dfrac{n}{m}-a\le\dfrac{n}{m}-\dfrac{n-1}{m}=\dfrac{1}{m}<b-a$, 所以有 $a<\dfrac{n}{m}<b$. 而 $\dfrac{n}{m}\in\mathbb{Q}$. 定理得证. □

1.2 数列与收敛

❖ **Definition:1.16 收敛** ▽

设 $\{x_k\}$ 是一实数列, 对于任意的正数 ε, 存在序号 k_0, 当 $k>k_0$ 且 $|x_k-x|<\varepsilon$ 成立时, 称**数列** $\{x_k\}$ **收敛于** x, 记为 $x_k\to x\ (k\to\infty)$, 或记为 $x=\lim\limits_{k\to\infty}x_k$. 其中 x 为数列 $\{x_k\}$ 的**极限**.

❖ **Definition:1.17 单调性** ▽

实数列 $\{x_k\}$ 满足 $x_{k+1}\ge x_k$, $k\in\mathbb{N}$ 或 $x_{k+1}\le x_k$, $k\in\mathbb{N}$ 时, 称其为**单调**的.

❖ **Definition:1.18 子数列** ▽

与满足 $k_1<k_2<\cdots<k_i<\cdots$ 的无限个自然数 k_i, $i\in\mathbb{N}$ 相对应的实数列 $\{x_k\}$ 的部分项所组成的新数列 $\{x_{k_i}\mid i\in\mathbb{N}\}$ 称为 $\{x_k\}$ 的**子数列**, 记为 $\{x_{k_i}\}$.

♦ **Theorem:1.19 收敛数列的性质** ▽

(1) 如果实数列 $\{x_k\}$ 是收敛的, 则这个数列是有界的.

(2) 如果实数列 $\{x_k\}$ 是收敛的, 则 $\{cx_k\}$ 也是收敛的, 其中 c 是常数.

(3) 如果实数列 $\{x_k\}$ 是收敛的, 则它的任意子数列也是收敛的.

(4) [单调有界准则] 如果实数列是单调有界的, 则它是收敛的.

(5) [夹逼定理] 设三个实数列 $\{x_k\},\{y_k\},\{z_k\}$ 满足 $x_k\le y_k\le z_k$, $k\in\mathbb{N}$. 如果 $x_k\to a(k\to\infty)$, $z_k\to a(k\to\infty)$, 则有 $y_k\to a(k\to\infty)$.

(6) 实数列 $\{x_k\}$ 是(单调)有界的时, 它的子数列收敛.

(7) 设实数列 $\{x_k\},\{y_k\}$ 满足 $x_k\to a(k\to\infty)$, $y_k\to a(k\to\infty)$, 则有

i) $x_k\pm y_k\to x\pm y(k\to\infty)$.

ii) $x_k\cdot y_k\to x\cdot y(k\to\infty)$.

iii) 设 $y\ne 0, y_k\ne 0, k\in\mathbb{N}$. 当 $k\to\infty$ 时, $\dfrac{x_k}{y_k}\to\dfrac{x}{y}$.

Proof: (1) 由数列收敛, $\forall\varepsilon>0,\exists k_0$, 当 $k>k_0$ 时, 有 $|x_k-x|<\varepsilon$ 成立. 故有 $|x_k|<|x|+\varepsilon$.

令 $K=\max\{|x_1|,\cdots,|x_{k-1}|,|x|+\varepsilon\}$, 无论 k 取何值, $|x_k|\le K$, 则 $\{x_k\}$ 有界.

(2) 如果 $c=0$, 则 $cx_k=0,k\in\mathbb{N}$. 显然成立.

如果 $c\ne0$, 对 $\forall\varepsilon>0$, 不失一般性, 设 $0<c$, 则 $\dfrac{\varepsilon}{c}$ 是一个正常数. $\exists k_0$, 当 $k>k_0$时, 有 $|x_k-x|<\dfrac{\varepsilon}{c}$ 成立. 即 $|cx_k-cx|=|c||x_k-x|<\varepsilon$. 由定义, $\{cx_k\}$ 是收敛的.

(3) 设实数列 $\{x_k\}$ 收敛于 x. 其任意子数列为 $\{x_{k_i}\},1<k_1<k_2<\cdots$. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists k_0$, 当 $k>k_0$ 时, 有 $|x_k-x|<\varepsilon$ 成立. 对于 $k_0,\exists v$, 使得 $k_v\ge k_0$ 成立, 故对 $\forall i>v,|x_{k_i}-x|<\varepsilon$ 成立. 则 $\{x_{k_i}\}$ 收敛.

(4) [只证明单增的情况] 由于 $\{x_k\}$ 有界, 由实数连续性公理, $\{x_k\}$ 存在上确界, 设为 s. 不失一般性, 设 $s>0$. $\forall\varepsilon>0$, $s-\varepsilon$ 不是上界. 故 $\exists k_0,x_{k_0}>s-\varepsilon$. 又 $\{x_k\}$ 单增有上界, s 为上确界, 对 $\forall k>k_0,s-\varepsilon<x_k\le s<s+\varepsilon$. 等价于 $|x_k-s|<\varepsilon$. 故 $\{x_k\}\to s(k\to\infty)$ 得证.

(5) 当任意一侧取等时, 则两数列极限相同, 收敛于 a.

当 $x_k<y_k<z_k$ 时, 有 $\forall\varepsilon>0,\exists k_1,k_2$, 当 $n>k_1$ 且 $m>k_2$ 时有 $-\varepsilon+a<x_n<\varepsilon+a$, $-\varepsilon+a<z_m<\varepsilon+a$. 令 $t=\max\{k_1,k_2\}$, 对 $\forall k\ge t$, 有 $-\varepsilon+a<x_k\le y_k\le z_k<\varepsilon+a$. 所以 $|y_k-a|<\varepsilon$, 得证.

(6) 有界包含了上有界、下有界. 由实数连续性公理, $\{x_k\}$ 有上、下确界, 分别设为 z_1,y_1. 于是有 $\{x_k\}\subset[y_1,z_1]$. 对 $\forall v_1$, 有 $y_1\le x_{v_1}\le z_1$. 以下开始对区间进行分割:

令 $u=\dfrac{y_1+z_1}{2}$, 将区间 $[y_1,z_1]$ 分为两个区间 $[y_1,u]$ 和 $[u,z_1]$. 由于 $\{x_k\}\subset[y_1,z_1]=[y_1,u]\cup[u,z_1]$, 故在 $[y_1,u]$ 和 $[u,z_1]$ 中至少有一个包含 $\{x_k\}$ 的无限项. 不失一般性, 假定包含 $\{x_k\}$ 的无限项的区间为 $[y_1,u]$.

令 $y_2=y_1,z_2=u$, 则区间 $[y_2,z_2]$ 包含 $\{x_k\}$ 的无限项. $\exists v_2>v_1$, 使得 $x_{v_2}\in[y_2,z_2]$ 满足 $y_1\le y_2<z_2\le z_1$. $z_2-y_2=\dfrac{z_1-y_1}{2},y_2\le x_{k_2}\le z_2$.

按上述方法每一次取上一次区间的一半, 无限次后, 有 $y_1\le y_2\le\cdots\le z_n\le\cdots\le z_2\le z_1$. $z_n-y_n=\dfrac{z_1-y_1}{2^n},y_n\le x_{v_n}\le z_n,n\in\mathbb{N}$.

由 $\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 单调有界, 以及(4), $\{y_n\}$、$\{z_n\}$ 存在极限, 设 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=s$. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists k_1$, 当 $k>k_1$ 时, $|y_k-z_k|=(z_1-y_1)/2^{k-1}<\varepsilon/2$ 成立. 另外对 $\forall\varepsilon>0,\exists k_2$, 当 $k>k_2$ 时, $|z_k-s|=|z_k-y_k+y_k-s|\le|z_k-y_k|+|y_k-s|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$ 成立. 故 $z_k\to s(k\to\infty)$. 由(5)知, $x_{v_k}\to s(k\to\infty)$. 即子数列 $\{x_{v_k}\}$ 收敛.

(7)(i) 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_1$, 当 $k>k_1$ 时,有 $|x_k-x|<\varepsilon/2$. 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_2$, 当 $k>k_2$ 时,有 $|y_k-y|<\varepsilon/2$.

取 $K=\max\{k_1,k_2\}$, 当 $k>K$ 时, 有 $|x_k+y_k-x-y|=|(x_k-x)+(y_k-y)|\le|x_k-x|+|y_k-y|<\varepsilon$. 加法得证.

取 $K=\max\{k_1,k_2\}$, 当 $k>K$ 时, 有 $|(x_k-y_k)-(x-y)|=|(x_k-x)-(y_k-y)|\le|x_k-x|+|y_k-y|<\varepsilon$. 减法得证.

(7)(ii) 由 $y_k\to y(k\to\infty)$, 结合(1)可知 $\exists M>0$, 使得 $\forall k,|y_k|<M$. 由 $|y_k<M|$ 和 $x\breve{}k\to x(k\to\infty)$, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_1$, $k>k_1$ 时, 有 $|x_k-x|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$.

因此 $|y_k(x_k-x)|\le M|x_k-x|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M}=\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由 $y\breve{}k\to y(k\to\infty)$, 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_2$, $k>k_2$ 时, 有 $|y_k-y|<\dfrac{\varepsilon}{2(|x|+1)}$.

因此 $|x(y_k-y)| \le |x||y_k-y| < |x|\cdot\frac{\varepsilon}{2(|x|+1)} < \frac{\varepsilon}{2}$.

取 $K=\max\{k_1,k_2\}$, 当 $k>K$ 时, 有 $|x_ky_k-xy| = |x_ky_k-xy_k+xy_k-xy| = |y_k(x_k-x)|+|x(y_k-y)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

(7)(iii) 只需证明 $\frac{1}{y_k}\to\frac{1}{y}(k\to\infty)$, 则由于 $\frac{x_k}{y_k}=x_k\times\frac{1}{y_k}$, 根据 (ii) 就可以推出 (iii) 成立.

由于 $y\neq 0, \forall\varepsilon>0, \exists\varepsilon'>0$,使得 $|y|>\varepsilon'>0$, 并且 $\frac{\varepsilon'}{(|y|-\varepsilon')|y|}\le\varepsilon$.

于是对 ε', $\exists k_0$, $\forall k>k_0$,有 $|y_k-y|<\varepsilon'$,即 $\{y_k\}\ge|y|-\varepsilon'$.

所以 $|\frac{1}{y_k}-\frac{1}{y}| = \frac{|y_k-y|}{|y_k||y|} < \frac{\varepsilon'}{(|y|-\varepsilon')|y|} \le \varepsilon$ 得证.

□

❖ Definition:1.20 发散 ▽

对于 $\forall\ m\in\mathbb{N}$, $\exists\ k_1$, 当 $k>k_1$ 时, 有 $x_k>m$, 就称数列 $\{x_k\}$ 是**向无穷大发散**的.

1.3 向量空间

❖ Definition:1.21 ▽

由 n 个实数组成的有序元素组称为 n 维**向量**, 表示为 $x^T=[x_1,x_2,\cdots,x_n]$. 称实数 x_i 是向量 x 的第 i 个元素或第 i 坐标.

❖ Definition:1.22 横向量 ▽

将元素纵向排列的向量称为**纵向量**, 而将元素横向排列的向量称为**横向量**.

✎ Remark:1.23 向量运算 ▽

$x,y\in\mathbb{R}^n, a\in\mathbb{R}$, $x^T=[x_1,x_2\cdots,x_n], y^T=[y_1,y_2,\cdots,y_n]$.

$ax=[ax_1,ax_2,\cdots,ax_n], x\cdot y=xy=[x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n]$(数量积).

♦ Theorem:1.24 向量的运算律 ▽

向量的和及其常数倍运算有以下性质, 其中 $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, $a,b\in\mathbb{R}$.

(1) $x+y=y+x$ (交换律);

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (结合律);

(3) $x+0=x$ (加法单位元的存在性);

(4) $x+(-x)=0$ (加法逆运算的存在性);

(5) $(a+b)x=ax+bx$ 并且 $a(x+y)=ax+ay$ (分配律);

(6) $(ab)x=a(bx)$ (关于实数的结合律);

(7) $1\cdot x=x$ (实数1的中性).

❖ **Definition:1.25 向量空间** ▽

对于和及常数倍运算,具有**定理[向量的运算律]**性质的向量集合称为**向量空间**.

✎ **Remark:1.26** ▽

经济向量二元运算符的记号: $a \geqq b$ 表示两向量每个元素都可相等, $a \geq b$ 表示向量 a 至少存在一个元素大于 b, $a > b$ 表示向量 a 的每个元素都大于 b (注意: 这组记号并不完备).

❖ **Definition:1.27 锥** ▽

集合 $K \subset \mathbb{R}^n$, $v \in K$, 并且对于 $\forall x \in K, t > 0$, 使得 $v + t(x - v) \in K$, 就将 K 称为**锥**.

❖ **Definition:1.28** ▽

将**定义[锥]**中的点 v 称为锥 K 的**顶点**.

Example: 定义 $\mathbb{R}^n$ 的两个子集: $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geqq 0\}$ (非负象限). $\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n | x > 0\}$ (正象限).

证明: $\mathbb{R}^n_+$ 是以0为顶点的锥, $\mathbb{R}^n_{++}$ 不是锥.

Proof: 取 $v = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n_+, t > 0$, 有 $tx \geq 0 \in \mathbb{R}^n_+$. 故 $\mathbb{R}^n_+$ 是以0为顶点的锥.

假设 $\exists v \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}, t > 0$, 使得 $v + t(x - v) \in \mathbb{R}^n_{++}$.

令 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)$, $x = (nv_1, v_2, \cdots, v_n)$. 其中$v_i$ 不全为0. 不妨设 $v_1 \neq 0$.

$v + t(x - v)$ 的第 i 分量 $[v + t(x - v)]_i = v_i + t(x_i - v_i) = [t(n - 1) + 1]v_1$. 当 $n < 1 - \dfrac{1}{t}$ 时, 即 $[v + t(x - v)] \notin \mathbb{R}^n_{++}$. 矛盾. 原命题得证. □

✎ **Remark:1.29 欧几里得空间中的距离** ▽

$x \in \mathbb{R}^n$ 到原点的距离称为向量的**模**, 即 $||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

❖ **Definition:1.30 距离** ▽

空间中两点 $x, y \in \mathbb{R}^n$, x_i, y_i 分别为向量 x, y 的第 i 分量, 将$d(x, y) = ||x - y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$ 称为 x, y 两点之间的**距离**.

♦ **Theorem:1.31 Cauchy-Schwarz不等式** ▽

对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y||$.

Proof: 对 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 和实数 $t \in \mathbb{R}$ 设 $f(t) = ||tx + y||^2$, 则 $f(t) = (tx + y)(tx + y) = t^2||x||^2 + 2tx \cdot y + ||y||^2 \geq 0$.

故 $\Delta = (x \cdot y)^2 - ||x||^2||y||^2 \leq 0 \Rightarrow |x \cdot y| \leq ||x|| \cdot ||y||$. □

♦ **Theorem:1.32** ▽

对于 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ 和实数 $a \in \mathbb{R}$, 有以下性质成立:

(1) $||x|| \geq 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时, $||x|| = 0$.

(2) $||ax|| = |a| \cdot ||x||$.

(3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Proof: (3) 对 $\forall x, y \in \mathrm{R}^n$, $||x+y||^2 = (x+y)(x+y) = ||x||^2 + 2x \cdot y + ||y||^2$.

由 Cauchy-Schwarz 不等式, $||x+y||^2 \leq ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$.

即 $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$. □

♦ **Theorem:1.33** ▽

对于 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$, 有以下性质成立:

(1) $d(x, y) \geq 0$, 当且仅当 $x = y$ 时, $d(x, y) = 0$.

(2) $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (三角不等式).

Proof: (3) 由 $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$, 对 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$,

$d(x, y) + d(y, z) = ||x - y|| + ||y - z|| \geq ||(x - y) + (y - z)|| = ||x - z|| = d(x, z)$ 成立. 故得证. □

✎ **Remark:1.34** ▽

在距离 d 被定义的情况下, 向量空间 $\mathbb{R}^n$ 被称为**欧几里得空间**. 具有**定理[1.32]**性质的空间是**模空间**. 具有**定理[1.33]**性质的空间是**距离空间**.

❖ **Definition:1.35 凸集合** ▽

设集合 $X \subset \mathbb{R}^n$. 对于任意的 $x, y \in X$ 和 $0 \leq \theta \leq 1$, 都有 $\theta x + (1 - \theta)y \in X$ 成立, 就将集合 X 称为**凸集合**.

❖ **Definition:1.36 凸组合** ▽

点 $\theta x + (1 - \theta)y$ 是连接点 x 和 y 的线段上的点, 称之为点 x 和 y 的**凸组合**.

♦ **Theorem:1.37** ▽

对于集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ 和实数 $a \in \mathbb{R}$, 如果 X, Y 为凸集合, 则 $X + Y, X - Y$ 和 aX 为凸集合.

Proof: $X \pm Y = \{z \in \mathbb{R}^n | z = x \pm y, x \in X, y \in Y\}$, 对 $\forall z_1, z_2 \in X \pm Y$ 和 $\forall \theta \in [0, 1]$, 有 $\theta z_1 + (1 - \theta)z_2 = \theta(x_1 \pm y_1) + (1 - \theta)(x_2 \pm y_2) = (\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \pm (\theta y_1 + (1 - \theta)y_2)$.

而$\theta x_1+(1-\theta)x_2\in X$, $\theta y_1+(1-\theta)y_2\in Y$, 故 $\theta z_1+(1-\theta)z_2\in X\pm Y$. 得证.

$aX=\{z\in\mathbb{R}^n|z=ax,x\in X\}$. 对 $\forall z_1,z_2\in aX$ 和 $\forall\theta\in[0,1]$, 有 $\theta z_1+(1-\theta)z_2=\theta az_1+(1-\theta)az_2=a(\theta z_1+(1-\theta)z_2)\in aX$. 得证. □

❖ Definition:1.38 凸锥 ▽

既是凸集又是锥的集合称为**凸锥**.

♦ Theorem:1.39 ▽

对于所有的 $\lambda\in\Lambda$, 如果集合 $X_\lambda\subset\mathbb{R}^n$ 是凸集合, 则$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 也是凸集合.

Proof: 设 $x,y\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, 实数 θ 满足 $0\le\theta\le1$, 则对于所有的 $\lambda\in\Lambda$, 有 $\theta x+(1-\theta)y\in X_\lambda$. 而 X_λ 是凸集合, 故对于任意的 λ, 有 $\theta x+(1-\theta)y\in X_\lambda$ 成立, 从而$\theta x+(1-\theta)y\in\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 成立. 所以 $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 是凸集合. □

❖ Definition:1.40 凸包 ▽

对于任意的 $S\subset\mathbb{R}^n$, 令 $\mathrm{co}S=\bigcap_{S\subset K,K\text{是凸集合}}$, 称 $\mathrm{co}S$ 为 S 的**凸包**.

Example: 证明: 任意凸集合的交集也是凸集合.

Proof: 设集合 $X,Y\in\mathbb{R}^n$ 是凸集合.

当 $X\cap Y$ 有两个及以上个点时, 对 $\forall x,y\in X\cap Y$, $\forall\theta\in[0,1]$, 由 $x,y\in X\cap Y$, 有 $x,y\in X$, 即 $x+(1-\theta)y\in X$.

同理 $x+(1-\theta)y\in Y$. 故有 $x+(1-\theta)y\in X\cap Y$.

当 $X\cap Y=\{a\}$ 或 $X\cap Y=\varnothing$ 时, 自然成立. □

Example: 证明: 集合 X 是凸集合的充分必要条件是 X 中的任意凸组合都属于 X.

Proof: ($\Rightarrow$) 利用数学归纳法完成.

归纳奠基. 对$\forall x_1,x_2\in X$, $\forall\theta\in[0,1]$, 有 $\theta x_1+(1-\theta)x_2\in X$, 即两点凸组合属于 X.

归纳假设. 假设对 $\forall k=n$ 个点的凸组合, 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_ix_i\in X$, 其中 $\theta_i\ge0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i=1$.

归纳步骤. 当 $k=n+1$ 时, 考虑 $n+1$ 个点的凸组合 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}\theta_ix_i=\theta_{n+1}x_{n+1}+(1-\theta_{n+1})\sum\limits_{i=1}^{n+1}\left(\dfrac{\theta_i}{1-\theta_{n+1}}\right)x_i$. 其中 $\theta_{n+1}\in[0,1)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta_i}{1-\theta_{n+1}}=1$.

由归纳假设, $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\theta_i}{1-\theta_{n+1}}x_i\in X$. 由于 X 是凸集, 其与 x_{n+1} 的凸组合也属于 X. 因此, 所有 $n+1$ 个点的凸组合属于 X.

($\Leftarrow$) 取 $k=2$, 对 $\forall x_1,x_2\in X$ 和 $\forall\theta\in[0,1]$, 两点的凸组合 $\theta x_1+(1-\theta)x_2\in X$, 这正是凸集定义. □

❖ **Definition:1.41 凸函数** ▽

设函数 $f: U \to R$, 凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$. 对于任意两点 $x, x' \in U$ 和满足 $0 < \theta < 1$ 的任意的实数 θ,有 $f(\theta x + (1-\theta)x') \leq \theta x + (1-\theta)f(x')$ 成立时, 称函数 f 为**凸函数**. 另外, $-f$ 为凸函数时, 称函数 f 为**凹函数**.

❖ **Definition:1.42 拟凹函数** ▽

设函数 $f: U \to R$, 凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$. 如果对于任意的两点 $x', x'' \in U$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$, 有 $f[(1-\lambda)x' + \lambda x''] \geq \min\{f(x'), f(x'')\}$ 成立, 则称函数 f 为 **拟凹函数**. 如果对于任意的两点 $x', x'' \in U$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$, 有 $f[(1-\lambda)x' + \lambda x''] > \min\{f(x'), f(x'')\}$ 成立, 则称函数 f 为**严格拟凹函数**.

❖ **Definition:1.43 拟凸函数** ▽

设函数 $f: U \to R$, 凸集合 $U \subset \mathbb{R}^n$. 如果对于任意的两点 $x', x'' \in U$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$, 有 $f[(1-\lambda)x' + \lambda x''] \leq \max\{f(x'), f(x'')\}$ 成立, 则称函数 f 为 **拟凸函数**. 如果对于任意的两点 $x', x'' \in U$ 和任意的 $\lambda \in [0,1]$, 有 $f[(1-\lambda)x' + \lambda x''] < \max\{f(x'), f(x'')\}$ 成立, 则称函数 f 为**严格拟凸函数**.

Example: 证明: 单调函数是拟凹函数.

Proof: 设 f 是单增函数, 则 $\forall x, y$, 有 $f(x) \leq f(y)$. 对 $\lambda \in [0,1]$, 定义 $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. 有 $x \leq z \leq y$. 故有 $f(x) \leq f(z) \leq f(y)$. 即 $f(z) \geq \min\{f(x), f(y)\}$. 故 f 是拟凹函数. f 为单减函数时, 有 $x \leq z \leq y$, 故有 $f(x) \geq f(z) \geq f(y)$, 即 $f(z) \geq \min\{f(x), f(y)\}$. □

2 消费与生产

2.1 消费者行为

❖ **Definition:2.1 产品空间** ▽

设经济中有 n 种产品. 第 i 种产品的量以 x_i 表示. 所有产品的量可以用 $x^T = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 表示. 将表示产品量的向量的集合称为**产品空间**.

❖ **Definition:2.2 消费集合** ▽

将消费者实际可能消费的量的范围称为**消费集合**.

❖ **Definition:2.3 效用函数** ▽

表示消费者消费产品的量 x 与其效用之间对应关系的函数 $u: u = U(x)$. 定义域为

$X \subset \mathbb{R}^n$, 值域为实数 $\mathbb{R}$.

❖ **Definition:2.4 无差异** ▽

对于两个消费量 $x, y \in X$ 和效用函数 $U : X \to \mathbb{R}$, 当 $U(x) < U(y)$ 时, 消费者**相对于** x **偏好** y. 当 $U(x) = U(y)$ 时, 就称消费者对 x 和 y 的**偏好无差异**.

❖ **Definition:2.5 偏好集合** ▽

对于消费集合的各点 $x \in X$, 对比 x 偏好的点集合 $P(x) = \{y \in X | U(x) < U(y)\}$, 称为**偏好集合**.

❖ **Definition:2.6 偏好的凸性** ▽

对 $\forall x \in X$, $P(x)$ 是凸集合.

❖ **Definition:2.7 无差异曲线** ▽

对于消费集合的各点 $x \in X$, 将与 x 的偏好无差异的点集 $I(x) = \{y \in X | U(x) = U(y)\}$ 称为**无差异曲线**.

❖ **Definition:2.8 边际替代率** ▽

无差异曲线的斜率的绝对值称为**边际替代率**.

❖ **Definition:2.9 价格向量** ▽

在 n 维产品空间中, 第 i 种产品的价格为 p_i. 则所有产品的价格 $p^T = [p_1, p_2, \cdots, p_n]$ 称为**价格向量**.

❖ **Definition:2.10 预算集合** ▽

在价格为 p 和收入为 m 的条件下, 消费者的消费量选择范围设为 $B(p, m)$, 则称 $B(p, m) = \{x \in X | p \cdot x \leq m\}$ 为**预算集合**.

❖ **Definition:2.11 预算约束线** ▽

在预算集合 $B(p, m)$ 中, 表示收入全部用于消费计划的点的集合, 即满足 $p \cdot x = m$ 的点 x 的集合, 被称为**预算约束线**.

❖ Definition:2.12 需求集合 ▽

在价格为 p 和收入为 m 的条件下, 消费者选择消费的范围为 $D(p,m)=\{x\in X|x\in B(p,m), B(p,m)\cap P(x)=\varnothing\}$. 将集合 $D(p,m)$ 称为**需求集合**.

❖ Definition:2.13 需求函数 ▽

在无差异曲线为严格凸的情况下, 若需求集合 $D(p,m)$ 内的元素只有一点 x_0, 则称 $D(p,m)$ 为**需求函数**.

Example: 证明: 预算集合 $B(p,m)$ 和需求集合 $D(p,m)$ 具有零阶齐次性.

Proof: $B(tp,tm)=\{x\in X|tp\cdot x\leq tm\}=\{x\in X|p\cdot x\leq m\}=B(p,m)$.

$D(tp,tm)=\{x\in X|x\in B(tp,tm), B(tp,tm)\cap P(x)=\varnothing\}=\{x\in X|x\in B(p,m), B(p,m)\cap P(x)=\varnothing\}=D(p,m)$. □

✎ Remark:2.14 ▽

上例意味着价格与收入的同比例变化不影响预算集合和需求集合.

2.2 一般化的偏好

❖ Definition:2.15 二元关系 ▽

由消费集合 X 的直积构成的集合 $X\times X=\{(x,y)|x\in X, y\in Y\}$. 设 $\succ$ 是 $X\times X$ 的子集, 即 $\succ\subset X\times X$, 则称其为集合 X 的**二元关系**.

❖ Definition:2.16 偏好关系 ▽

二元关系 $\succ$ 被称为消费者的**偏好关系**.

✎ Remark:2.17 偏好关系的理性 ▽

假设 $\succ$ 具有以下性质:

非反射性: $\forall x\in X$, 不存在关系 $x\succ x$.

非对称性: 如果 $x\succ y$, 则 $y\succ x$不成立.

传递性: 如果 $x\succ y$, $y\succ z$, 则 $x\succ z$.

则偏好关系 $\succ$ 是**理性**的.

♦ Theorem:2.18 ▽

如果偏好关系 $\succ$ 具备非反射性和传递性, 那么它具有非对称性.

Proof: 反证法.

当 $x \succ y$ 时, 若有对称性, 则有 $y \succ x$. 由传递性, $x \succ x$, 与非反射性矛盾. 故原命题成立.
□

✎ **Remark:2.19 效用函数表示理性偏好** ▽

设效用函数 $U: X \to \mathbb{R}$. 定义偏好关系 $\succ_U = \{(x,y) \in X \times X | U(x) > U(y)\}$. 则可证明此偏好是理性的.

✎ **Remark:2.20 显示性偏好[a]及其弱公理** ▽

若消费者购买了一组消费品而没有购买另一组他能支付的消费品, 则对于第二组消费品, 第一组消费选择被认为是**显示性偏好**.
设 x^0 和 x^1 是不同的点, 并且消费者在价格为 p_0 时选择 x^0, 在价格为 p_1 时选择 x^1. 若存在 $p_0 \cdot x^1 \leq p_0 \cdot x^0$, 则有 $p_1 \cdot x^0 > p_1 \cdot x^1$, 则满足**显示性偏好的弱公理**.

[a]我一般翻译为显示偏好.

✎ **Remark:2.21 辞书式顺序[a]** ▽

在非负象限 $\mathbb{R}_+^n$ 上的偏好关系 $\succ_L = \{(x,y) \in \mathbb{R}_+^r \times \mathbb{R}_+^r | \exists j,\ s.t.\ x_j > y_j, \text{且在} i < j \text{时}, \forall i, x_i = x_j\}$.

[a]我一般翻译为字典序.

Example: 证明: 辞书式顺序是理性的.

Proof: 非反射性. 对 $\forall x \in X$, 不存在 j, $s.t.\ x_j > y_j$, 故 $x \succ_L x$ 不成立, 满足非反射性.

传递性. 若$X, Y, Z \in \mathbb{R}_+^n$, 满足 $X \succ_L Y, Y \succ_L Z$, 即

$\exists j, s.t.\ x_j > y_j; \forall i < j, s.t.\ x_i = y_i; x \in X, y \in Y$.

$\exists k, s.t.\ y_k > z_k; \forall i < k, s.t.\ y_i = z_i; y \in Y, z \in Z$.

则取 $m = \min\{j,k\}$, 有 $\exists m, s.t.\ x_m > z_m; \forall i < m, s.t.\ x_i = z_i; x \in X, z \in Z$. 故有 $X \succ_L Z$. 传递性得证.

由**定理[2.18]**可知, $\succ_L$ 具有非对称性, 故 $\succ_L$ 是理性的. □

2.3 生产者的行为

❖ **Definition:2.22 生产集合** ▽

生产集合是生产所用的投入量和产出量的组合中, 可以实行的组合的集合. 生产集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$, Y 的元素 $y^T = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ 各成分 y_i 是第 i 产品的投入量或产出量.(正值产出, 负值投入)

✎ **Remark:2.23 生产集合的性质** ▽

1. 无生产活动的可能性: 原点属于生产, 即向量 $0 \in Y$.
2. 生产集合的凸性: $\forall y, y' \in Y, 0 < \theta < 1$, 都有 $\theta y + (1-\theta)y' \in Y$.(意味着边际报酬递减)
3. 自由处理: 如果 $y \in Y$ 并且 $y' \leqq y$, 则 $y'Y$.
4. 自由生产的否定: 生产集合满足 $Y \cap \mathbb{R}^n_+ = \{0\}$.

✎ **Remark:2.24 企业利润** ▽

$$\pi = p \cdot y = \sum_{i=1}^{n} p_1 \cdot y_i.$$

一般地, 设两个生产量为 y, y', 有 $\pi = p \cdot y$, $\pi' = y' \cdot p$ 成立, 则 $p \cdot (y - y') = 0$. 即 p 与 $y - y'$ 正交.

❖ **Definition:2.25 供给集合** ▽

在价格 p 下, 设使企业获得最大利润的产量为 y, 定义 $S(p) = \{y \in Y | \forall z \in Y, p \cdot y \geq p \cdot z\}$ 为**供给集合**.

❖ **Definition:2.26 供给函数** ▽

$S(p)$ 中的元素只有1个时, $S(p)$ 就是价格 p 的函数, 称为**供给函数**.

❖ **Definition:2.27 利润函数** ▽

给出价格 p, 企业获得的利润最大值设为 $\pi(p)$, $\pi(p) = p \cdot S(p)$ 是 p 的函数, 称为**利润函数**.

Example: 证明: 供给集合具有零阶齐次性, 利润函数具有一阶齐次性.

Proof: $\forall t > 0, p$, $S(tp) = \{y \in Y | \forall z \in Y, tp \cdot y \geq tp \cdot z\} = \{y \in Y | \forall z \in Y, p \cdot y \geq p \cdot z\} = S(p)$. 故供给函数零阶齐次.

$\pi(tp) = tpS(tp) = tpS(p) = t \cdot \pi(p)$. 故利润函数一次齐次. □

2.4 生产函数与生产技术

❖ **Definition:2.28 生产函数** ▽

生产某种产品需要 k 种要素, 其投入量向量为 x. 此时表示可能的最大产出量 q 的函数 $q = f(x)$ 即为**生产函数**, 其中 $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$.

❖ **Definition:2.29 凹性** ▽

对 $\forall x, x' \in \mathbb{R}^k_+$, $\forall 0<\theta<1$, 使得 $f(\theta x(1-\theta)x') \geq \theta f(x)+(1-\theta)f(x')$, 具备该性质的函数就是凹函数.

❖ **Definition:2.30 生产集合** ▽

对应生产函数, 定义 $Y_f=\{(-x,q)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R} | q\leq f(x)\}$, $Y_f\subset\mathbb{R}^{k+1}$, 其为**生产集合**.

♦ **Theorem:2.31** ▽

如果生产函数是凹函数, 则生产集合 Y_f 是凸集合.

Proof: 设 $(-x,q)$, $(-x',q')$ 是集合 Y_f 内的点, 由 Y_f 的定义, 有 $q\leq f(x)$, $q'\leq f(x)$.

对 $\forall 0<\theta<1$, 有 $\theta q+(1-\theta)q'\leq\theta f(x)+(1-\theta)f(x')$.

由于 $f(x)$ 是凹函数, 有 $\theta f(x)+(1-\theta)f(x')\leq f(\theta x+(1-\theta)x')$.

故有 $\theta q+(1-\theta)q'\leq f(\theta x+(1-\theta)x')$.

即 $(-(\theta x+(1-\theta)x'),\theta q+(1-\theta)q')=\theta(-x,q)+(1-\theta)(-x',q')\in Y_f$.

故 Y_f 是凸集合. □

❖ **Definition:2.32** ▽

考虑生产要素投入量按同比例增加, 生产规模扩大时, 对 $\forall x\in\mathbb{R}^k_+, t>1$, 如果 $f(tx)>tf(x)$ 成立, 则称生产函数 f 为**规模收益递增**的, 类似还有递减和不变的.

♦ **Theorem:2.33** ▽

如果生产函数是凹函数, 则规模收益不变或递减.

Proof: $\forall x\in\mathbb{R}^k_+, t>1$, f 是凹函数, 有

$$f(x)=f\left[\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot 0+\frac{1}{t}\cdot tx\right]\geq\left(1-\frac{1}{t}\right)f(0)+\frac{1}{t}f(tx).$$

又 $f(0)\geq 0$, 有 $f(x)\geq\frac{1}{t}f(tx)$, 即 $tf(x)\geq f(tx)$, 规模收益不变或递减. □

❖ **Definition:2.34** ▽

将投入量可变化的生产要素称为**可变生产要素**, 固定不变的生产要素称为**固定生产要素**. 将所有生产要素可变化的生产期间称为**长期**, 否则称为**短期**.

❖ **Definition:2.35 一次齐次的生产函数** ▽

f 为生产函数, 对于 $x\in\mathbb{R}^k_+$ 和实数 $t>1$, 如果 $f(tx)=tf(x)$, 则称 f 为**一阶齐次的生产函数**. 故一阶齐次的生产函数就是规模报酬不变的函数.

♦ Theorem:2.36 ▽
如果生产函数是一阶齐次的, 对应的生产集合 Y_f 是以原点为顶点的锥.

Proof: 即证 $\forall y \in Y_f, t \geq 0$, 有 $ty \in Y_f$ 成立.

设 $(-x, q) \in Y_f$, 即 $q \leq f(x)$. 由于生产函数是一阶齐次的, 对 $\forall t \geq 0$, 有 $tq \leq tf(x) = f(tx)$ 成立. 根据生产集合的定义, 有 $(-tx, tq) = t(-x, q) \in Y_f$.

因此, 集合 Y_f 是以原点为顶点的锥. □

Example: 生产函数 $Y = aL + bK$, $Y = \min\left\{\frac{L}{a}, \frac{K}{b}\right\}$,

$Y = A\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)K^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$ $(A > 0, 0 < \alpha < 1, \rho > -1, \rho \neq 0, \sigma = \frac{1}{1+\rho}$ 为替代弹性),

$Y = AL^{\alpha}L^{1-\alpha}(0 < \alpha < 1, A > 1)$ 都是一次齐次的.

Example: 在一个只有两种商品的世界中, 消费者的效用函数 $u(x) = (\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho})^{1/rho}$.

证明:

(1) 当 $\rho = 1$ 时, 无差异曲线是线性的.

(2) 当 $\rho \to 0$ 时, 这一效用函数与 $u(x) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$ 具有同样偏好.

(3) 当 $\rho \to -\infty$ 时, $u(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$.

Proof: (1) $\rho = 1$ 时, $u(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ 是线性的.

(2) $\ln u = \frac{1}{\rho}\ln(\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho})$. 当 $\rho \to 0$ 时, $x_i^{\rho} = 1 + \rho \ln x_i$(Taylor).

代入得 $\ln u \doteq \frac{1}{\rho}\ln(\alpha_1 + \alpha_2 + \rho(\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 x_2))$.

由于 $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, 有

$$\ln u \doteq \frac{1}{\rho}\ln(1 + \rho(\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 x_2)) = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2.$$

故 $u \to e^{\alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$. 即具有同样偏好.

(3) 设 $x_1 \leq x_2$, 有 $x_1^{\rho} \geq x_2^{\rho}(\rho < 0)$.

故 $\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho} \leq (\alpha_1 + \alpha_2)x_1^{\rho} = x_1^{\rho}$, $\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho} \geq (\alpha_1 + \alpha_2)x_2^{\rho} = x_2^{\rho}$.

两边开 $1/\rho$ 次方, $(1/\rho \to 0^-)$, $x_1 \leq u = (\alpha_1 x_1^{\rho} + \alpha_2 x_2^{\rho})^{1/\rho} \leq x_1^{(\alpha_1 + \alpha_2)/\rho} = x_1$.

由夹逼定理, $u \to x_1 = \min\{x_1, x_2\}$. $x_2 \leq x_1$ 类似可证. □

3 线性规划和产业关联

略...

4 向量函数的连续性和微分

4.1 连续性、开集和闭集

❖ **Definition:4.1** ▽

对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{k} \in \mathbb{N}$, 当 $k > \bar{k}$ 时, 有 $d(x^k, x^0) < \varepsilon$ 关系成立, 就称点列 $\{x_k\}$ 向 x^0 **收敛**. 此时将 x^0 称为点列 $\{x_k\}$ 的**极限**, 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x^0$ 或 $x^k \to x^0$.

设函数为 $f: X \to \mathbb{R}^m, X \subset \mathbb{R}^n, x^0 \in X$.

❖ **Definition:4.2** ▽

对于收敛于 x^0 的点列 $\{x^k\}$, $\{f(x^k)\}$ 也收敛于 $f(x^0)$ 时, 即如果 $x^k \to x^0$, 则 $f(x^k) \to f(x^0)$, 就称 f 在点 x^0 处**连续**.

❖ **Definition:4.3** ▽

如果函数 f 在其定义域 X 中的每一个点都是连续的, 则称函数 f 是**连续函数**.

♦ **Theorem:4.4 中值定理** ▽

如果函数 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 是连续函数, 对于在 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任意一个值 y, $\exists c \in [a, b]$, 使得 $f(c) = y$ 成立.

Proof: 构造两数列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$, 使得 $a_0 = a, b_0 = b$; 对于 a_{k-1} 和 b_{k-1}, 它们的下一项 a_k 和 b_k 定义为:

如果 $f\left(\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right) > y$, 则 $a_k = a_{k-1}$, $b_k = \dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$; 如果 $f\left(\dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}\right) \leq y$, 则 $a_k = \dfrac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$, $b_k = b_{k-1}$.

这样就有 $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots \leq b_k \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 \leq b$, $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ 成立.

根据任意上有界(下有界)的集合一定存在上确界(下确界), 数列 $\{a_k\}$ 存在上确界, 而数列 $\{b_k\}$ 存在下确界.

根据数列的构造, $\{a_k\}$ 上确界与 $\{b_k\}$ 的下确界是一致的, 即 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = c = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$.

从而根据函数的连续性, $y \leq \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) = f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \leq y$. 定理得证. □

❖ **Definition:4.5 开球** ▽

在空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 给出点 $x \in \mathbb{R}^n$ 和适当的实数 $\varepsilon > 0$, 定义集合 $B(x, \varepsilon) = \{y | d(x, y) < \varepsilon\}$. 集合 $B(x, \varepsilon)$ 被称为以点 x 为球心, ε 为半径的**开球**.

❖ Definition:4.6 近旁[a] ▽

称包含开球 $B(x,\varepsilon)$ 的 $\mathbb{R}^n$ 的任意子集为点 x 的**近旁**, 标记为 $N(x)$.

[a]我一般翻译为邻域.

❖ Definition:4.7 开集 ▽

设 U 为空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 对于各点 $x \in U$, $\exists \varepsilon > 0$, 使得 $B(x,\varepsilon) \subset U$ 时, 集合 U 被称为**开集**.

Example: 证明: 整个空间 $\mathbb{R}^n$ 是一个开集.

Proof: 取 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 与 $\forall \varepsilon > 0$, 由开球的定义, 集合 $B(x,\varepsilon)$ 由整个空间 $\mathbb{R}^n$ 中的点组成, 因此 $B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, 所以 $\mathbb{R}^n$ 是一个开集. □

Example: 设 Ω 为欧氏空间 $X \subset \mathbb{R}^n$ 中的所有开球组成的族, 证明 $X = \bigcup\limits_{B\in\Omega} B$.

Proof: 一方面, 对 $\forall x \in X$, 必有 $\forall \varepsilon > 0$, $x \in B(x_0,\varepsilon) = \{x|d(x_0,x) < \varepsilon\}$, 也就是 $x \in \Omega$.

所以 $X \subset \bigcup\limits_{B\in\Omega} B$.

另一方面, 对 $\forall x \in \bigcup\limits_{B\in\Omega} B$, 由于 $\bigcup\limits_{B\in\Omega} B$ 是由 X 内的点组成的.

所以有 $x \in X$, 即 $X \supset \bigcup\limits_{B\in\Omega} B$.

综上原命题成立. □

Example: 证明: 在欧氏空间 $X \subset \mathbb{R}^n$ 中的任意两个开球交集是开集.

Proof: 设 $U = B(x_1,\varepsilon_1) \cap B(x_2,\varepsilon_2)$, 对于 $\forall x \in U$, 有 $\varepsilon_i - d(x,x_i) > 0$ $(i = 1,2)$.

记 $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1 - d(x,x_1), \varepsilon_2 - d(x,x_2)\}$.

对 $\forall y \in B(x,\varepsilon)$, 有

$$d(y,x_i) \le d(y,x) + d(x,x_1) < \varepsilon + d(x,x_i) \le \varepsilon_i - d(x,x_i) + d(x,x_i) = \varepsilon_i \ (i = 1,2).$$

故而 $\forall y \in U$, 有 $B(x,\varepsilon) \subset B(x_1,\varepsilon_1) \cap B(x_2,\varepsilon_2)$. □

❖ Definition:4.8 ▽

设 G 是空间 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 集合 G 的补集 $\mathbb{R}^n$
G 是开集时, 集合 G 就被称为**闭集**.

✎ Remark:4.9 ▽

将以所有开集为元素的集合用 Γ 表示, 则 $\Gamma = \{U \subset \mathbb{R}^n | U\text{是开集}\}$. 将以所有闭集为元素的集合用 Ξ 表示, 则 $\Xi = \{G \subset \mathbb{R}^n | G\text{是闭集}\}$, 对于集合 $X \subset \mathbb{R}^n$, 有: $\mathrm{cl}\ X = \bigcap\limits_{X\subset G\subset \Xi} G$ 是包含 X 的最小闭集, 称为集合的**闭包**; $\mathrm{int}\ X = \bigcup\limits_{U\subset X, U\in\Gamma} U$ 是包含于 X 的最大开集, 称为集合的**内部**. $\mathrm{bd}\ X = \mathrm{cl}\ X \setminus \mathrm{int}\ X$ 为 X 的**边界**. $\mathrm{ext}\ X = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{cl}\ X$ 是 X 的**外部**.

4.2 微分

❖ **Definition:4.10** ▽

对于任意 $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 如果 $|h| < \delta$, 就有使得 $\left|\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - a\right| < \varepsilon$ 成立的 a 存在, 就称 f 在点 x 处**可微**.

❖ **Definition:4.11** ▽

将**定义[4.10]**中的 a 称为函数 f 的**微分**. 一般地, 将微分记为 f', 即 $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

♦ **Theorem:4.12 Rolle定理** ▽

设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 是 $[a,b]$ 上定义的连续函数, 在开区间 (a,b) 上可微, 如果 $f(a) = f(b) = k$, 则存在 $c\in(a,b)$, 使得 $f'(c) = 0$ 成立.

♦ **Theorem:4.13 Lagrange中值定理** ▽

连续函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在各点 $x\in(a,b)$ 处可微, 则存在点 $c\in(a,b)$, 使得 $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 成立.

❖ **Definition:4.14 偏微分** ▽

当 y 的取值依赖于 n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 时, 函数关系式可以写成 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. 如果函数 f 关于 x_i 可微, 就称函数 f 关于 x_i 可**偏微分**, 称这个微分 f 为关于 x_i 的偏微分, 可记作

$$f_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+h}, x_{i+1}, \cdots, x_n) - f(x_1, \cdots, x_n)}{h}.$$

❖ **Definition:4.15 全微分** ▽

将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的各个变量的变化值记为 $h_1, h_2, \cdots, h_n(\sqrt{h_1^2 + x_2^2 + \cdots + h_n^2} \neq 0)$. 对于 n 个数 $a_1, \cdots, a_n$, 当 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ 同时趋向 0 时,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x_1+h_1, \cdots, x_n+h_n) - f(x_1, \cdots, x_n) - a_1h_1 - \cdots - a_nh_n|}{\sqrt{h_1^2+\cdots+h_n^2}} = 0.$$

就称函数 f 可**全微分**.

❖ **Definition:4.16 可微** ▽

设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集, 函数 $f: U \to \mathbb{R}^n$. 在 $x \in U$ 处, $\exists \varepsilon > 0$, 对于 $||h|| < \varepsilon$ 的所有 $h \in \mathbb{R}^n$, 都有 $x + h \in U$, 即点 x 是定义域 U 中的点, 此时, 存在 $m \times n$ 的矩阵 A, 使得 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{||f(x+h) - f(x) - Ah||}{||h||} = 0$ 成立, 就称函数 f 在点 x 处**可微**.

❖ **Definition:4.17 Jacob矩阵** ▽

上式中的矩阵 A 被称为函数 f 在点 x 处的微分, 又被称为**雅可比矩阵**. 表示为 $\partial f(x)$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. 其中元素 (i,j) 可表示为 $\partial f_{ij}(x)$ 或 $f_{ij}(x)$ 或 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. 即

$$\partial f(x) = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mn}(x) \end{bmatrix}.$$

❖ **Definition:4.18 连续可微** ▽

函数 $f: U \to \mathbb{R}^m$ 是可微的, 并且微分 $\partial f: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$ 是连续函数时, 函数 $f: U \to \mathbb{R}^m$ 就被称为**连续可微**的函数.

♦ **Theorem:4.19** ▽

函数 $f: U \to \mathbb{R}^m$ 在点 $x \in U$ 处可微, 则它在 $x \in U$ 处连续.

Proof: 函数 f 在点 $x \in U$ 处可微, 由 $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{||f(x+h) - f(x) - Ah||}{||h||} = 0$, 点 $h \in \mathbb{R}^n$ 向 0 收敛时, $||h||$ 向 0 收敛.

因此 $||f(x+h) - f(x) - Ah|| = ||f(x+h) - f(x) - \partial f(x)h||$ 向 0 收敛. 而 $\partial f(x)h$ 是 h 的连续函数, 故向 0 收敛.

从而 $f(x+h)$ 向 $f(x)$ 收敛, 即函数 f 在点 x 处连续. □

❖ **Definition:4.20 复合函数** ▽

设有两个函数为 $f: U \to \mathbb{R}^m$ 和 $g: V \to \mathbb{R}$, 其中 $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$. 对 $\forall x \in U$, 有 $f(x) \in V$. 函数 $g \circ f: U \to \mathbb{R}$ 定义为 $g(f(x))$, 为两函数的**复合函数**.

♦ **Theorem:4.21** ▽

如果函数 f 在点 $x \in U$ 处可微, g 在点 $f(x)$ 处可微, 则复合函数 $g \circ f$ 在点 $x \in U$ 处可微, 且 $\partial g \circ f(x) = \partial g(f(x))\partial f(x)$ 成立.

4.3 向量函数的二阶微分

❖ Definition:4.22 梯度 ▽

设函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 是以 $U\subset\mathbb{R}^n$ 的实值函数, 函数 f 在所有的点 $x\in U$ 处可微时, 微分 $\partial f(x)$ 是 n 维横向量 $\partial f(x)=[f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)]$. 称 $[\partial f(x)]^T$ 为函数 f 在点 x 的**梯度**, 记作 grad $f(x)$ 或 $\nabla f(x)$.

❖ Definition:4.23 二阶微分 ▽

设 $U\subset\mathbb{R}^n$, 函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in U$ 处可微. 由于微分 $\partial f:U\to\mathbb{R}^n$ 是 n 维横向量, 将其转置后可定义从集合 U 到空间 $\mathbb{R}^n$ 的函数: $x\in U\to[\partial f(x)]^T\in\mathbb{R}^n$, 记为 $\partial f:U\to\mathbb{R}^n$, 将其作为在 $x\in U$ 处可微的函数, 称函数 ∂f 在点 $x\in U$ 处的微分为**二阶微分**, 用 $\partial^2 f$ 表示. 二阶微分 $\partial^2 f(x)$ 是一个 n 阶方阵, 元素 (i,j) 可表示为 $f_{ij}(x)$ 或 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$. 即

$$\partial^2 f(x)=\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x)\\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ f_{m1}(x) & f_{m2}(x) & \cdots & f_{mn}(x)\end{bmatrix}.$$

❖ Definition:4.24 Hessian矩阵 ▽

函数 f 的二阶微分 $\partial^2 f(x)$ 被称为**海塞矩阵**.

❖ Definition:4.25 二次可微 ▽

设 $U\in\mathbb{R}^n$, 函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 在其定义域 U 上的所有点可微. 若 $\partial f:U\to\mathbb{R}^n$ 在点 $x\in U$ 处可微, 就称函数 f 在点 x 处二次可微. 如果函数 f 在 U 的所有点可微, 就称函数**二次可微**. 此时, 由于可微函数是连续的, 一阶微分得到的结果 $\partial f:U\to\mathbb{R}^n$ 是连续函数, 所以函数 f 是连续可微的.

❖ Definition:4.26 连续二次可微 ▽

如果 $\partial^2 f:U\to\mathbb{R}^{n\times n}$ 在点 $x\in U$ 处连续, 就称函数 f 在点 x 处**连续二次可微**.

♦ Theorem:4.27 ▽

如果函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 在点 $x\in U$ 处连续二次可微, 则点 x 处的海塞矩阵 $\partial^2 f(x)$ 就是对称矩阵, 即对于 $\forall i\neq j$, 有 $f_{ij}(x)=f_{ji}(x)$.

Proof: 仅就 f 为两个自变量 x_1, x_2 的函数的情况进行证明, 一般的情况可类似证明.

$f:y=f(x_1,x_2)$, 将 x_1,x_2 固定, 对于两实数 $h_1>0,h_2>0$,

定义 $A=f(x_1+h_1,x_2+h_2)-f(x_1+h,h_2)-f(x_1,x_2+h_2)+f(x_1,x_2)$, $g(x_1)=f(x_1,x_2+h)-f(x_1,x_2)$.

由拉格朗日中值定理, 对于 $s_1\in[x_1,x_1+h]$, 有 $A=g(x_1+h)-g(x_1)=g'(s_1)h_1$ 成立.

另外, 由偏微分定义 $g'(s_1)=f_1(s_1,x_2+h_2)-f_1(s_1,x_2)$.

进而, 将上式的 $f_1(x_1,x_2)$ 看成自变量 x_2 的函数, 再由拉格朗日中值定理, $\exists s_2\in[x_2,x_2+h]$, 使得 $f_1(s_1,x_2+h_2)-f_1(s_1,x_2)=f_{12}(s_1,s_2)h_2$ 成立.

从而由上述三式, 有 $A=f_{12}(s_1,s_2)h_1h_2$.

同理, x_1,x_2 对换, 并由拉格朗日中值定理 $\exists t_1\in[x_1,x_1+h_1],t_2\in[x_2,x_2+h_2]$, 使得 $A=f_{21}(t_1,t_2)h_1h_2$.

故有 $f_{12}(s_1,s_2)=f_{21}(t_1,t_2)$.

当 h_1,h_2 充分小时, 由 f_{12} 和 f_{21} 的连续性, 有 $f_{12}(x_1,x_2)=f_{21}(x_1,x_2)$, 定理得证. □

♦ **Theorem:4.28** ▽

如果在凸集合 $U\in\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 是凸函数(或凹函数), 它在定义域 U 内的点连续.

♦ **Theorem:4.29** ▽

设凸集合 $U\subset\mathbb{R}^n$ 上定义的实值函数 $f:U\to\mathbb{R}$ 是在点 $x\in U$ 处连续二次可微的, 如果函数 f 是凸函数, 则在点 $x\in U$ 处的海塞矩阵 $\partial^2f(x)$ 是半正定的, 即对于 $\forall z\in\mathbb{R}^n$, 有 $z^T\partial^2f(x)z\geq 0$ 成立. 如果函数 f 是凹函数, 则在点 x 处的海塞矩阵 $\partial^2f(x)$ 是半负定的.

Proof: 取一向量 $z\in\mathbb{R}^n$, 定义 $g:g(t)=f(x+tz)$.

首先证明 g 是凸函数且二阶微分 $\partial^2g(t)$ 非负.

由函数 f 的凸性, 对于两点 t,t' 以及 $\forall\theta,0<\theta<1$ 有

$$\begin{aligned}\theta g(t)+(1-\theta)g(t')&=\theta f(x+tz)+(1-\theta)f(x+t'z)\\&\geq f(\theta(x+tz)+(1-\theta)(x+t'z))\\&=f(x+(\theta t+(1-\theta)t')z)=g(\theta t+(1-\theta)t')\end{aligned}$$

成立. 故 g 是凸函数.

进而, 设 $t_1<t_2<t_3$, 由 g 的凸性, $\dfrac{t_3-t_2}{t_3-t_1}g(t_1)+\dfrac{t_2-t_1}{t_3-t_1}g(t_3)\geq g(t_2)$.

故有 $\dfrac{g(t_3)-g(t_2)}{t_3-t_2}\geq\dfrac{g(t_3)-g(t_1)}{t_3-t_1}\geq\dfrac{g(t_2)-g(t_1)}{t_2-t_1}$,

由 $t_2\to t_3$ 或由 $t_2\to t_1$ 有 $g'(t_3)\geq\dfrac{g(t_3)-g(t_1)}{t_3-t_1}\geq g'(t_1)$.

故函数 g 的微分 g' 是增函数, 从而二阶微分 $\partial^2g(t)$ 非负.

综上, 有 $g'(t)=\partial f(x+tz)z$, $\partial^2g(t)=z^T\partial^2f(x+tz)z$ 成立.

当 $t=0$ 时, $\partial^2(g(0))=z^T\partial^2f(x)z\geq 0$ 成立. □

♦ **Theorem:4.30** ▽

一个凹函数是拟凹函数, 一个严格凹函数是严格拟凹函数.

Proof: 设 $f: U \to \mathbb{R}$ 是凹的. 在 U 内任取两点 x_1, x_2, 不失一般性, 设 $f(x_1) \geq f(x_2)$.

根据凹函数的定义, 对于 $x = \lambda x + (1-\lambda)x_2$, 有 $f(x) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$, $\lambda \in [0,1]$.

即 $f(x) \geq f(x_2) + \lambda(f(x_1) - f(x_2))$, $\lambda \in [0,1]$.

因为 $\lambda \geq 0$, 且 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 故 $\lambda(f(x_1) - f(x_2)) \geq 0$, 故有 $f(x) \geq f(x_2)$.

即 $f(x) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$, $\lambda \in [0,1]$.

故 $f(x)$ 是拟凹函数.

将 $\geq$ 替换为 $>$ 即为对应严格情况的证明. □

Example: 证明: 凸集的闭包是凸集.

Proof: 设 C 是凸集, 其闭包为 $\mathrm{cl}\, C$.

任取 $x, y \in \mathrm{cl}\, C$, 由闭包的定义, 存在 C 中的序列 $\{x_n\}, \{y_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$.

对 $\forall \lambda \in [0,1]$, $z = \lambda x + (1-\lambda)y$. 由于 C 是凸集, 所以对于 $\forall n$, $z_n = \lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in C$.

又 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty}(\lambda x_n + (1-\lambda)y_n) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} x_n + (1-\lambda)\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lambda x + (1-\lambda)y = z$.

即 z 是 C 中 $\{z_n\}$ 序列的极限.

所以 $z \in \mathrm{cl}\, C$. 由 $x, y \in \mathrm{cl}\, C$, $\lambda \in [0,1]$ 的任意性, 所以 $\mathrm{cl}\, C$ 是凸集. □

5 需求和供给

5.1 需求函数

设消费者集合为 $X \subset \mathbb{R}^n$, 效用函数为 $U: X \to \mathbb{R}$, 对于价格 $p \in \mathbb{R}^n$ 和收入 $m \in \mathbb{R}$, 预算集合 $B(p,m)$, 需求集合 $D(p,m)$, 则有 $B(p,m) = \{x \in X | p \cdot x \leq m\}$,

$$\begin{aligned} D(p,m) &= \{x \in B(p,m) | \text{如果} U(y) > U(x), \text{则} y \notin B(p,m)\} \\ &\Leftrightarrow \{x \in X | x \in B(p,m), B(p,m) \cap P(x) = \varnothing\}. \end{aligned}$$

进一步假定所有产品价格为正数, 并将价格 p 与收入 m 作限定: $Q = \{(p,m) \in \mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R} | \exists x_0 \in X, p \cdot x_0 < m\}$.

基本前提: 存在需求函数, 即对于 $\forall (p,m) \in Q$, 需求集合 $D(p,m)$ 有 $\mathrm{card}\ (D(p,m)) = 1$, 进而假定 $D: Q \to \mathbb{R}^n$.

✎ **Remark:5.1 局部非饱和假定** ▽

(1) 需求函数 $D: Q \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的;

(2) [收入无剩余]对 $\forall (p,m) \in Q$, $p \cdot D(p,m) = m$.

对于各点 $x \in X$, 与点 x 无差异或比 x 偏好的集合 $IP(x) = \{y \in X | U(y) \geq U(x)\}$. $IP(x)$ 的实质是一个带边的偏好集合, 这条边就是无差异曲线. 对于价格 $p \in \mathbb{R}^n_{++}$, 定义

$F^x(p)=\{y\in IP(x)|\text{如果}z\in IP(x),\text{则}p\cdot z\geq p\cdot y\}$. 集合 $F^x(p)$ 是集合 $IP(x)$ 中支出最小的点的集合.

$F^x(p)$ 是价格向量 p 的正交平面与集合 $IP(x)$ 的切点, 对于 $y\in F^x(p)$, 最小支出为 $p\cdot y$.

❖ **Definition:5.2 最小支出函数** ▽

函数 $E^x(p)=p\cdot F^x(p)$ 被称为**最小支出函数或补偿收入函数**.

✎ **Remark:5.3 假定** ▽

对 $\forall p\in\mathbb{R}^n_{++}$, 集合 $F^x(p)$ 非空, 故最小支出 $E^x(p)$ 是有限值.

♦ **Theorem:5.4** ▽

最小支出函数是凹函数, 即对于 $\forall p,p'\in\mathbb{R}^n_{++}$ 和 $\forall 0<\theta<1$, 有 $\theta E^x(p)+(1-\theta)E^x(p')\leq E^x(\theta p+(1-\theta)p')$.

Proof: 如果 $y\in F^x(\theta p+(1-\theta)p')$, 从 $F^x(\theta p+(1-\theta)p')$, 可得 $E^x(\theta p+(1-\theta)p')=(\theta p+(1-\theta)p')\cdot y$.

进而从 $F^x(p)$ 和 $F^x(p')$ 定义, $E^x(p)\leq p\cdot y$, $E^x(p')\leq p'\cdot y$.

故有 $\theta E^x(p)+(1-\theta)E^x(p')\leq(\theta p+(1-\theta)p')y=E^x(\theta p+(1-\theta)p')$. 定理得证. □

❖ **Definition:5.5 补偿需求函数** ▽

一般支出最小化问题的解取决于价格和效用, 解为获取一定效用所需最小需求, 称为**补偿需求**. $D^x(p)=D(p,E^x(p))$, 其中 $(p,E^x(p))\in Q$, 称其为**补偿需求函数/希克斯需求函数**.

✎ **Remark:5.6** ▽

在消费者偏好的无差异曲线相对原点是凸的条件下, 补偿需求与支出最小的点是一致的, 即 $D^x(p)=E^x(p)$, 但一般地 $D^x(p)\subset E^x(p)$. 原因: 当需求集合存在无限个元素时, 不存在需求函数, 即 $D^x(p)=\varnothing\subset E^x(p)$.

♥ **Lemma:5.7** ▽

对于 $(p,E^x(p))\in Q$ 的价格 $p\in\mathbb{R}^n_{++}$, 有 $D^x(p)\subset F^x(p)$, 即有:

(1) $E^x(p)=p\cdot D^x(p)$;

(2) $U(x)\leq U(D^x(p))$.

Proof: 根据 $D^x(p)=D(p,E^x(p))$ 以及 $\forall(p,m)\in Q$, $p\cdot D(p,m)=m$[假定5.1(2)],

有 $p\cdot D^x(p)=p\cdot D(p,E^x(p))=E^x(p)$. (1)得证.

另外, 如果 $y\in F^x(p)$, 由 $F^x(p)$ 的定义, 有 $U(x)\leq U(y)$, $p\cdot y=E^x(p)$ 成立.

两点 $y, D^x(p)$ 都可以在价格为 p 和收入 $E^x(p)$ 的条件下购买消费.

由 $D(p, E^x(p))$ 定义, 有 $U(y) \leq U(D^x(p))$, 从而 $U(x) \leq U(D^x(p))$. 引理得证. □

♥ Lemma:5.8 ▽

如果 $(p, E^x(p)) \in Q$, 则补偿需求函数 D^x 在点 $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ 上连续.

Proof: 根据定理[4.28], 凹函数在其定义域的内点上连续, 因此最小支出函数 E^x 是连续的.

又 $D^x(p) = D(p, E^x(p))$ 和需求函数 $D : Q \to \mathbb{R}^n$ 是连续可微的, 即 D^x 是连续的. □

5.2 斯勒茨基方程

♦ Theorem:5.9 Mckenzie引理 ▽

如果 $(p, E^x(p)) \in Q$, 则最小支出函数 E^x 在点 p 是可微的, 且 $E^x_j(p) = D^x_j(p)$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 成立. 即 $\partial E^x(p) = [D^x(p)]^T$, 这里 $E^x_j(p) = \dfrac{\partial E^x(p)}{\partial p_j}$ 是函数 E^x 对 p_j 的偏微分.

Proof: 设 $h \in \mathbb{R}^n$, $||h|| > 0$. 由于函数 E^x 是连续的, 如果向量 h 充分小, 则 $(p+h, E^x(p+h)) \in Q$.

由**引理[5.7]**以及 E^x 的定义,有

$$p \cdot D^x(p) = E^x(p), E^x(p) \leq p \cdot D^x(p+h).$$
$$(p+h) \cdot D^x(p+h) = E^x(p+h), E^x(p+h) \leq (p+h) \cdot D^x(p).$$

从上述关系可得 $h \cdot D^x(p+h) - h \cdot D^x(p) \leq E^x(p+h) - E^x(p) - h \cdot D^x(p) \leq 0$.

从而 $\left|\dfrac{h}{||h||}(D^x(p+h) - D^x(p))\right| \geq \left|\dfrac{E^x(p+h) - E^x(p) - D^x(p) \cdot h}{||h||}\right|$ 成立.

进而由柯西-施瓦兹不等式. $\left|\left|\dfrac{h}{||h||}\right|\right| ||(D^x(p+h) - D^x(p)|| \geq \left|\dfrac{h}{||h||}(D^x(p+h) - D^x(p))\right|$.

由 $\left|\left|\dfrac{h}{||h||}\right|\right| = 1$, 有 $||D^x(p+h) - D^x(p)|| \geq \left|\dfrac{E^x(p+h) - E^x(p) - D^x(p) \cdot h}{||h||}\right|$.

当 $h \to 0$ 时, 由**引理[5.8]**, 函数 D^x 连续, $D^x(p+h)$ 收敛于 $D^x(p)$. 故 $||D^x(p+h) - D^x(p)|| = 0$.

由微分的定义, 函数 E^x 在点 p 处的微分 $\partial E^x(p) = [D^x(p)]^T$. 定理得证. □

✎ Remark:5.10 马肯基引理的意义 ▽

价格微调时的补偿收入的变化是以能够购买的价格变化前的补偿需求进行的.

♥ Lemma:5.11 ▽

如果 $x = D(p, m)$, 则 $E^x(p) = m$, $D^x(p) = x$.

Proof: 设 $x=D(p,m)$, 根据 $p\cdot D(p,m)=m$ **假定[5.1(2)收入无剩余]**, 有 $p\cdot x=m$.

由于 card $(D(p,m))=1$, $\forall y\in IP(x)$, 并且 $y\neq x$, 有 $p\cdot y>m$.

从而 $x\in F^x(p)$, 其中 $F^x(p)=\{y\in IP(x)|\text{如果}z\in IP(x),\text{有}p\cdot z\geq p\cdot y\}$, 即 $E^x(p)=p\cdot x=m$.

也即 $D^x(p)=D(p,E^x(p))=D(p,m)=x$, 引理得证. □

✎ **Remark:5.12 引理意义** ▽

消费者在效用最大化时, 往往伴随着支出最小化.

♦ **Theorem:5.13 Slutsky方程** ▽

如果 $x=D(p,m)$, 则补偿需求函数 D^x 在 p 处可微, 并且 $D_{ij}(p,m)=D^x_{ij}(p)-x_jD_{im}(p,m)$, $(i,j=1,2,\cdots,n)$. 这里 $D_{ij}=\dfrac{\partial D_i}{\partial p_j}$, 即产品 i 的需求关于 p_j 的偏微分, $D_{im}=\dfrac{\partial D_i}{\partial m}$, 即产品 i 的需求 D_i 关于收入 m 的偏微分, 另外 $D^x_{ij}=\dfrac{\partial D^x_i}{\partial p_j}$ 是产品 i 的补偿需求关于 p_j 的偏微分.

Proof: 设 $x=D(p,m)$, 根据**引理[5.11]**, 有 $E^x(p)=m$, $D^x(p)=x$. 故 $(p,E^x(p))=(p,m)\in Q$.

由马肯基引理, E^x 在点 p 处可微; 由**假定[5.1(1)]**, 补偿需求函数 D^x 也可微.

产品 i 的补偿需求函数 $D^x_i(p)=D_i(p,E^x(p))$.

故对产品 j 的价格 p_j 偏微分, 有 $D^x_{ij}(p)=D_{ij}(p,E^x(p))+D_{im}(p,E^x(p))E^x_j(p)$.

代入 $E^x(p)=m$ 和马肯基引理: $E^x_j(p)=D^x_j(p)=x_j$.

代入上式移项即得 $D_{ij}(p,m)=D^x_{ij}(p)-x_jD_{im}(p,m)$. 定理得证. □

❖ **Definition:5.14** ▽

斯勒茨基方程中 $D^x_{ij}(p)$ 称为**替代效应**, $x_jD_{im}(p,m)$ 称为**收入效应**.

✎ **Remark:5.15 解释** ▽

(1) $p_1\uparrow,\bar{p_2}$; $x_1\downarrow,x_2\uparrow$, 由 x 点移向 A 点, 效用不变, 实际收入不变, 新价格为 EE', 替代效应 $D^x_{ij}(p)$ 为点 x 与点 A 对应的 x_1 的消费量之差.

(2) $p_1\uparrow$, 为了使实际收入不变, 名义收入降低, EE' 向下移. 而 $p_1\uparrow$, 实际收入 $\downarrow$, 效用表示为 $u-u'$. 新预算约束变为 BF 与 u' 相切于 C. 所以 $A\to C$ 为收入效应, 对应 $x_jD_{im}(p,m)$.

❖ **Definition:5.16 替代矩阵** ▽

将补偿需求函数 D^x 在 p 处进行微分, 可得到 Jacob 矩阵

$$\partial D^x(p) = \begin{bmatrix} D^x_{11}(p) & D^x_{12}(p) & \cdots & D^x_{1n}(p) \\ D^x_{21}(p) & D^x_{22}(p) & \cdots & D^x_{2n}(p) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ D^x_{n1}(p) & D^x_{n2}(p) & \cdots & D^x_{nn}(p) \end{bmatrix},$$

称为**替代矩阵**或**斯勒茨基矩阵**.

♦ **Theorem:5.17** ▽

在价格 $p \in \mathbb{R}^n_{++}$ 处, $(p, E^x(p)) \in Q$. 此时替代矩阵 $\partial D^x(p)$ 有以下性质:

(1) [海塞矩阵]替代矩阵 $\partial D^x(p)$ 是对称的, 即 $D^x_{ij}(p) = D^x_{ji}(p)$.

(2) 替代矩阵是半负定的, 即对于 $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $z^T \partial D^x(p) z \le 0$.

(3) $p^T \partial D^x(p) = 0$, $\partial D^x(p) \cdot p = 0$.

Proof: 根据**引理[5.8]**, D^x 是连续. 进而由马肯基引理, $\partial E^x(p) = [D^x(p)]^T$.

故函数 E^x 的微分 ∂E^x 是连续的, 从而函数 E^x 连续可微.

由补偿需求函数的定义以及**假定[5.1(1)]**, 需求函数 D 是连续可微的, 故 D^x 也是连续可微的.

从而 E^x 二次连续可微, 函数 E^x 的二阶微分 $\partial^2 E^x(p)$ 等于函数 D^x 的微分 $\partial D^x(p)$.

由**定理[4.27]**, 函数 E^x 的海塞矩阵 $\partial^2 E^x(p)$ 是对称的, 故雅各比矩阵 $\partial D^x(p)$ 是对称的. (1)得证.

根据**定理[5.4]**, 得知函数 E^x 是凹函数. 由**定理4.29**, 海塞矩阵 $\partial^2 E^x(p)$ 是半负定的. (2)得证.

根据**引理[5.7(1)]**, 有 $E^x(p) = p \cdot D^x(p)$.

对 p_j 进行微分, 有 $E^x_j(p) = D^x_j(p) + \sum_{i=1}^n p_i D^x_{ij}(p)$.

由马肯基引理, $E^x_j(p) = D^x_j(p)$. 故有

$$\sum_{i=1}^n p_i D^x_{ij}(p) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D^x_{1j}(p) \\ \cdots \\ D^x_{1n}(p) \end{bmatrix} = 0 \ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

故有 $p^T \partial D^x(p) = 0$. 从 $\partial D^x(p)$ 的对称性, 有 $\partial D^x(p) \cdot p = 0$. (3)得证. □

✎ **Remark:5.18 推导** $E^x_j(p) = D^x_j(p) + \sum_{i=1}^n p_i D^x_{ij}(p)$ ▽

$E^x(p) = p \cdot D^x(p) = \sum_{i=1}^n p_i D^x_i(p)$.

当 $i=j$ 时, $\dfrac{\partial E^x(p)}{\partial p_j}=D_j^x(p)+p_j\cdot\dfrac{\partial D_j^x(p)}{\partial p_j}$. $i\neq j$ 时, $\dfrac{\partial E^x(p)}{\partial p_j}=p_i\dfrac{\partial D_i^x(p)}{\partial p_j}$.
求和有 $E_j^x(p)=D_j^x(p)+p_j\cdot\dfrac{\partial D_j^x(p)}{\partial p_j}+\sum_{i=1,i\neq j}^{n}p_i\dfrac{\partial D_i^x(p)}{\partial p_j}=D_j^x(p)+\sum_{i=1}^{n}p_iD_{ij}^x(p)$.

♣ **Corollary:5.19 定理5.17推论** ▽

(1) 由 (2) 可知, $D_{ij}^x(p)\leq 0$, 是产品 i 价格对其需求的效应, 其被称为**自替代效应**, 总是非负的.
(2) 由 (1) 指产品 i 的价格对产品 j 的需求效应, 被称为**交叉替代效应**. 特别地, 当 $n=2$ 时, 由 (3) 可知, $p_1D_{11}^x(p)+p_2D_{21}^x(p)=0$, 所以 $D_{12}^x(p)=D_{21}^x(p)\geq 0$, 交叉替代效应非负.
(3) 由 (3), 替代矩阵 $\partial D^x(p)$ 的所有列与价格向量正交. 在图中替代效应沿预算线移动, 始终与价格向量正交.

❖ **Definition:5.20 间接效用函数** ▽

将需求函数 D 与效用函数 U 的复合函数 $V:Q\to\mathbb{R}$ 称为**间接效用函数**.

Table 1: 效用最大化与支出最小化问题的比较

	效用最大化问题	支出最小化问题
问题描述	$\max\ u$ $s.t.\ p\cdot x=m$	$\min\ p\cdot x$ $s.t.\ u(x)=u$
解	需求函数 $D(p,m)$	补偿需求函数 $D^x(p)$
解代入目标函数	间接效用函数 $V(p,m)$	支出函数 $E^x(p)$

♦ **Theorem:5.21 Roy恒等式** ▽

如果 $x=D(p,m)$, 并且效用函数 $U(x)$ 在 x 处可微, 则 $-\dfrac{V_j(p,m)}{V_m(p,m)}=D_j(p,m)$ $(j=1,2,\cdots,n)$, 其中 V_j 与 V_m 分别为间接效用函数 V 关于 p_j 和 m 的偏微分.

Proof: 首先设 $h\in\mathbb{R}^n$, $||h||>0$. 如果向量 h 充分小, 则 $(p+h,E^x(p+h))\in Q$, 此时由**引理[5.7]**和**引理[5.11]**, 有:

$$\begin{aligned}U(D(p,E^x(p)))&=U(D(p,m))=U(x)\quad(\text{引理}[5.11])\\(\text{引理}[5.7])&\leq U(D^x(p+h))=U(D(p+h,E^x(p+h)))\end{aligned}$$

所以 $V(p,E^x(p))\leq V(p+h,E^x(p+h))$ 并且 $V(p+h,E^x(p+h))$ 在 $h=0$ 处取最小值.

从而, 令 $V(p+h, E^x(p+h))$ 关于 p_j 的偏微分在 $h=0$ 时为0, 有

$$V_j(p, E^x(p)) + V_m(p, E^x(p))E_j^x(p) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

根据马肯基引理和**引理[5.11]**, 有 $E_j^x(p) = D_j^x(p) = x_j = D_j(p, m)$. 移项命题得证. □

♣ **Corollary:5.22** ▽

在与**定理[5.21]**相同条件下, 有 $\dfrac{V_j(p,m)}{V_i(p,m)} = \dfrac{D_j(p,m)}{D_i(p,m)} \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

设 $x = D(p, m)$, 并且效用函数在 x 可微, 通过点 x 的无差异曲线与预算曲线在点 x 处相切. 设通过点 x 的无差异曲线是满足 $U(z) = U(x)$ 的点 z 的集合, 对 z 进行全微分, 有 $\partial U(z)\mathrm{d}z = 0$ 或 $\nabla U(z)\mathrm{d}z = 0$.

同时, 预算曲线是满足 $p \cdot z = 0$ 的点 z 的集合, 对该式进行全微分, 有 $p \cdot \mathrm{d}z = 0$.

由两线相切, 可得 $\nabla U(x)$ 与向量 p 同向, 即 $\nabla U(x) = \lambda p$ 或 $U_i(x) = \lambda p_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ 被称为**效用最大化条件**.

✎ **Remark:5.23 效用最大化条件的应用: 货币的边际效用** ▽

对同一消费者而言, 在收入不变时, 其货币的边际效用不变.

需求函数满足预算约束 $p \cdot D(p, m) = m$.

对 p_j 微分, 有 $D_j(p,m) + \sum_{i=1}^{n} p_j D_{ij}(p,m) = 0$.

将效用最大化条件 $U_i(x) = \lambda p_i$ 代入, 有 $D_j(p,m) + \dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} U_i(x) D_{ij}(p,m) = 0$.

同时由间接效用函数的定义, 有 $V_j(p,m) = \dfrac{\partial}{\partial p_j} U(D(p,m)) = \sum_{i=1}^{n} U_i D_{ij}(p,m)$.

故有 $\lambda D_j(p,m) + \dfrac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} U_i(x) D_{ij}(p,m) = 0$.

用罗伊恒等式, 有 $\lambda = V_m(p,m)$, 从而实数 λ 就是**货币的边际效用**.

5.3 供给函数

✎ **Remark:5.24 价格有限** ▽

企业的生产集合 $Y \subset \mathbb{R}^n$, 对于价格 $p \in \mathbb{R}^n$, 供给集合 $S(p) = \{y \in Y | \text{如果} z \in Y, \text{则} p \cdot z \leq p \cdot y\}$. 利润集合 $\pi(p) = p \cdot S(p)$. 对价格 p 进行限制 $P = \{p \in \mathbb{R}^n | \exists b \in \mathbb{R}, \text{如果} y \in Y, p \cdot y \leq b\}$.

♦ **Theorem:5.25** ▽

集合 P 是以原点为顶点的凸锥.

Proof: 如果 $p = 0$, 对 $\forall y \in Y$, $p \cdot y \leq 0$, 根据集合 P 的定义, $0 \in P$, 所以 P 包含原点.

设 $p \in P, t > 0$. 由集合 P 的定义, $\exists b \in \mathbb{R}$, $\forall y \in Y$, 有 $p \cdot y \leq b$ 成立.

所以有 $tp \cdot y \leq tb$ 成立. 从而 $tp \in P$, 集合 P 为一个锥.

设 $p, p' \in P$, $0 < \theta < 1$. 由集合 P 的定义, $\exists b, b' \in \mathbb{R}$, $\forall y \in Y$, 有 $p \cdot y \leq b$, $p' \cdot y \leq b'$ 成立.

从而对 $\forall y \in Y$, 有 $(\theta p + (1-\theta)p') \cdot y \leq \theta b + (1-\theta)b'$, 也即 $\theta p + (1-\theta)p' \in P$, P 为凸集合, 得证. □

✎ Remark:5.26 ▽

企业的供给函数定义在价格集合 P 的内点上, 设点 $p \in P$ 为 P 的内点, 即 $\exists \varepsilon > 0$, $s.t.\ \forall q, ||q - p|| < \varepsilon$, $q \in P$. 集合 P 的所有内点的集合用 $\text{int}\ P$ 表示.

✎ Remark:5.27 假定 ▽

$\forall p \in \text{int}\ P$, 集合 $S(p)$ 是单元素集合.

♥ Lemma:5.28 ▽

如果供给函数 S 在点 $p \in \text{int}\ P$ 处可微, 则 $p^T \partial S = 0$.

Proof: 由利润函数 π 的定义, $\forall a \in \text{int}\ P$, $\pi(p) = p \cdot S(p) \geq p \cdot S(q)$ 成立.

从而 $p \cdot S(q)$ 在 $q = p$ 时取最大值. 即 $p \cdot S(q)$ 对 q_j 的偏微分在 $q = p$ 处等于 0.

$$\left.\frac{\partial[p \cdot S(q)]}{\partial q_j}\right|_{q=p} = \sum_{i=1}^{n} p_i S_{ij}(p) = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{1,j}(p) \\ \cdots \\ S_{n,j}(p) \end{bmatrix} = 0\ (j = 1, 2, \cdots, n).$$

从而 $p^T \partial S = 0$. □

♦ Theorem:5.29 Hotelling引理 ▽

如果供给函数在 S 处可微, 则利润函数 π 在点 p 处可微, 并且 $\dfrac{\partial \pi(p)}{\partial p_i} = S_i(p)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 即 $\partial \pi(p) = [S(p)]^T$ 成立.

Proof: 由利润函数定义 $\pi(p) = p \cdot S(p)$, 对 p 进行微分, 有 $\partial \pi(p) = [S(p)]^T + p^T \partial S(p)$.

由**引理[5.28]**, $p^T S(p) = 0$. 故有 $\partial \pi(p) = [S(p)]^T$. 得证. □

✎ Remark:5.30 霍特林引理的意义 ▽

价格发生微小变化时, 利润的变化量是维持原来产量 $S(p)$ 所实现的利润的变化.

♥ Lemma:5.31 ▽

利润函数 π 是凸函数, 即对于 $\forall p, p' \in \text{int}\ P$ 和满足 $0 < \theta < 1$ 的 $\theta \in \mathbb{R}$, 有 $\theta\pi(p) + (1-\theta)\pi(p') \geq \pi(\theta p + (1-\theta)p')$ 成立.

Proof: 设 $y \in S(\theta p+(1-\theta)p')$, 从 $\pi(\theta p+(1-\theta)p')$ 的定义, 有 $\pi(\theta p+(1-\theta)p') = (\theta p+(1-\theta)p')\cdot y$, $y \in Y$.

而从 $S(p)$ 和 $S(p')$ 的定义, 有 $\pi(p) \geq p\cdot y$, $\pi(p') \geq p'\cdot y$.

由此, 有 $\theta\pi(p)+(1-\theta)\pi(p') \geq (\theta p+(1-\theta)p')\cdot y = \pi(\theta p+(1-\theta)p')$, 即证得 π 是凸函数. □

♦ **Theorem:5.32** ▽

设供给函数在 int P 上连续可微, 此时在各点 $p \in \text{int } P$ 的供给函数 S 的微分 $\partial S(p)$ 有如下性质:

(1) 矩阵 $\partial S(p)$ 是对称的, 即 $S_{ij}(p) = S_{ji}(p)$.

(2) 矩阵 $\partial S(p)$ 是半正定的, 即对 $\forall z \in \mathbb{R}^n$, $z^T\partial S(p)z \geq 0$ 成立.

(3) $p^T\partial S(p) = 0$, 以及 $\partial S(p)p = 0$.

Proof: 由霍特林引理, $\partial\pi(p) = [S(p)]^T$, 所以由条件可知 π 连续二次可微. 从而 $\partial^2\pi(p) = \partial S(p)$.

由**定理[4.27]**, 函数 π 的海塞矩阵是对称的, 故雅可比矩阵 $\partial S(p)$ 也是对称的. (1)得证.

由**引理[5.31]**, π 是凸函数, 再由**定理[4.29]**, 海塞矩阵 $\partial^2\pi(p) = \partial S(p)$ 是半正定的. (2)得证.

由 (1) 和**引理[5.28]**, $p^T\cdot\partial S(p) = 0$ 成立, 由对称性 $\partial S(p)\cdot p = 0$, (3)得证. □

5.4 成本函数和要素需求

✎ **Remark:5.33** ▽

设企业投入 k 种生产要素生产一种产品的生产函数为 $f:\mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$. 对应产量 $q \geq 0$, 定义 $X(q) = \{x \in \mathbb{R}_+^k | q \leq f(x)\}$ 为使产量达到 q 以上所投入的生产要素的组合的集合.

❖ **Definition:5.34 要素的需求集合、最小成本** ▽

设各生产要素的价格均为正, 以向量 $w \in \mathbb{R}_{++}^k$ 表示. 对于 w 和 $q \geq 0$, 要素的需求集合 $F^q(w) = \{x \in X(q) | \forall z \in X(q), w\cdot x \leq w\cdot z\}$, 最小成本 $C^q(w) = w\cdot F^q(w)$.

✎ **Remark:5.35 假定** ▽

要素需求集合 $F^q(w)$ 是要素价格 $w \in \mathbb{R}_{++}^k$ 的函数, 在各 w 点处, $F^q(w)$ 是由一个点构成的集合.

♥ **Lemma:5.36** ▽

如果要素需求函数 $F^q(w):\mathbb{R}_{++}^k \to \mathbb{R}^k$ 在点 $w \in \mathbb{R}_{++}^k$ 处可微, 则 $w^T\partial F^q(w) = 0$.

Proof: 与**引理[5.28]**完全完全相同. □

♦ **Theorem:5.37 Shephard引理** ▽

如果要素需求函数 F^q 在 w 处可微, 则最小成本函数 C^q 在 w 处亦可微, 并且 $\dfrac{\partial C^q(w)}{\partial w_i} = F_i^q(w)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 即 $\partial C^q(w) = [F^q(w)]^T$ 成立.

Proof: 与霍特林引理完全相同. □

♦ **Theorem:5.38** ▽

设要素需求函数 $F^q : \mathrm{R}^k_{++} \to \mathbb{R}^k$ 在点 $w \in \mathbb{R}^k_{++}$ 处可微, 此时点 $w \in \mathbb{R}^k_{++}$ 处的微分 $\partial F^q(w)$ 具有以下性质:

(1) 矩阵 $\partial F^q(w)$ 是对称的.

(2) 矩阵 $\partial F^q(w)$ 是半负定的.

(3) $w^T \cdot \partial F^q(w) = 0$, $\partial F^q(w) \cdot w = 0$.

Proof: 与**定理[5.32]**完全相同. □

❖ **Definition:5.39 成本函数** ▽

将生产要素的价格 w 固定, 定义函数 $C : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : C(q) = C^q(w)$. 表示企业生产量 q 和总成本 c 的关系, 被称为**成本函数**.

♦ **Theorem:5.40** ▽

如果生产函数 $f : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}_+$ 是凹函数, 则成本函数 $C = C(q)$ 是凸函数.

Proof: 设 $q, q' \geq 0$, $0 < \theta < 1$. 根据成本函数的定义, 对于 $x, x' \in \mathbb{R}^k_+$, 有 $C(q) = w \cdot x$, $q \leq f(x)$, $C(q') = w \cdot x'$, $q' \leq f(x')$.

由上式以及生产函数 f 是凹函数, 有 $\theta q + (1-\theta)q' \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(x') \leq f(\theta x + (1-\theta)x')$.

即投入生产要素 $\theta x + (1-\theta)x'$, 则可以生产产品 $\theta q + (1-\theta)q'$. 从而由成本函数的定义, 有 $C(\theta q + (1-\theta)q') \leq w \cdot (\theta x + (1-\theta)x')$.

所以 $\theta C(q) + (1-\theta)C(q') = w \cdot (\theta x + (1-\theta)x') \geq C(\theta q + (1-\theta)q'$ 得证. □

Example: 证明: 最小成本函数是一次齐次的凹函数.

Proof: 由 C^q 的定义: $C^q(w) = w \cdot F^q(w)$.

$\forall k > 0, C^q(kw) = kw \cdot F^q(kw) = kw \cdot \{x \in X(q) | \forall z \in X(q), kw \cdot x \leq kw \cdot z\} = kwF^q(w) = kC^q(w)$.

一次齐次性质得证.

取 $w, w' \in \mathbb{R}^k_{++}$, $\forall \theta \in [0, 1]$. $C^q(\theta w + (1-\theta)w') = (\theta w + (1-\theta)w')F^q(\theta w + (1-\theta)w')$.

$C^q(\theta w) + C^q((1-\theta)w') = \theta w F^q(\theta w) + (1-\theta)w' F^q((1-\theta)w')$.

而对 $\forall k > 0$, $F^q(kw) = \{x \in X(q) | \forall z \in X(q) kw \cdot x \leq kw \cdot z\} = \{x \in X(q) | \forall z \in X(q), w \cdot x \leq w \cdot z\} = F^q(w)$.

故 $C^q(\theta w) + C^q((1-\theta)w') = \theta w F^q(w) + (1-\theta)w' F^q(w') = \theta C^q(w) + (1-\theta)C^q(w')$.

由最小成本函数的定义, 给定要素价格, 其需求使成本最低, 有 $wF^q(w) \leq wF^q(\theta w + (1-\theta)w')$, $w'F^q(w') \leq w'F^q(\theta w + (1-\theta)w')$.

故有

$$\begin{aligned}
C^q(\theta w) + C^q((1-\theta)w') &= \theta w F^q(w) + (1-\theta)w' F^q(w') \\
&\leq \theta w F^q(\theta w + (1-\theta)w') + (1-\theta)w' F^q(\theta w + (1-\theta)w'). \\
&= (\theta w + (1-\theta)w') F^q(\theta w + (1-\theta)w') = C^q(\theta w + (1-\theta)w').
\end{aligned}$$

故凹性得证. □

Example: 如果生产函数 $f : \mathbb{R}_+^k \to \mathbb{R}_+$ 是一次齐次的函数, 试证明: 成本函数 $C(q)$ 是线性函数, $\exists a \in \mathbb{R} > 0$, 有 $C(q) = aq$.

Proof: 由生产函数 f 是一次齐次的, 有 $\forall \lambda \geq 0$, 有 $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

由 $X(q) = \{x | q \leq f(x)\}$, 当 $q' = \lambda q$ 时, $X(\lambda q) = \{\lambda x | \lambda q \leq f(\lambda x)\} = \{\lambda x | x \in X(q)\}$.

成本函数 $C(q) = \min\limits_{x \in X(q)} w \cdot x$, 对 $q' = \lambda q$, 最小化问题变为

$$C(\lambda q) = \min_{x' \in X(\lambda q)} w \cdot x' = \min_{\lambda x \in X(\lambda q)} w(\lambda x) = \lambda \min_{x \in X(q)} w \cdot x = \lambda C(q).$$

表明 $C(q)$ 是关于 q 的一次齐次函数.

一次齐次函数满足 $C(q) = C(1 \cdot q) = q \cdot C(1)$. 令 $C(1) = w \cdot F'(w)$, 其中 $F'(w)$ 为 $q = 1$ 时的最小成本投入向量.

则 $C(q) = qw \cdot F'(w) = w \cdot (qF'(w))$.

记 $F^q(w) = qF'(w)$, 故 $C(q) = w \cdot F^q(w)$ 为 q 的线性函数. □